

9 月 狐田稲荷神社

【算額第 2 問】

今有狐田植不知苗束数

只云五把宛而余一把 又云七把宛而余二把 問総束数幾何



(題意)

狐が田植えをする。苗の束数は分からないが、
5 把ずつ植えると 1 把余り、7 把ずつ植えると 2 把余るといふ。
総束数を求めよ。

(術文)

答曰、総束数一十六束
術曰、只云名左、又云名右、依剩一術得左段数三、乗只又云、
余差満右数去之、乗只云加只云得総束数

(注)

答えは無数にありますが、原文の「答曰」では最小解を与えています。

【解説】

5 把ずつ植えると 1 把余る束数 = 5 で割ると 1 余る整数 = $5x + 1$ (x は整数)

7 把ずつ植えると 2 把余る束数 = 7 で割ると 2 余る整数 = $7y + 2$ (y は整数)

と表せますから、方程式 $5x + 1 = 7y + 2$ が成り立ちます。

これを書き換えると、 $5x - 7y = 1$ …… (*)

(略解 1)

方程式 (*) の整数解を、ユークリッドの互除法を用いて求めます。

$$7 = 5 \times 1 + 2 \dots\dots ①、 \quad 5 = 2 \times 2 + 1 \dots\dots ②$$

①を $2 = 7 - 5 \times 1$ として②に代入すると、 $5 = (7 - 5 \times 1) \times 2 + 1$

この式を変形すると、 $5 \times (1 + 1 \times 2) - 7 \times 2 = 1$

よって、整数解の (一つ) は $(x, y) = (3, 2)$

※ 術文にある「剰一術」(和算家のユークリッド互除法) については、第 11 回の寺子屋で取り上げます。

(略解 2)

方程式 (*) は、『塵劫記』に載っている「油分け算」としてとらえ直すことができます。

「油がたくさん入っている桶がある。5 升枡と 7 升枡の二枡を用いて、1 升の油を量れ」
そこで、二枡の油量を順序対で表してみましよう。

(5 升枡の油量, 7 升枡の油量)

これによって、作業の進行を次のように表現することができます。

$$(0, 0) \Rightarrow (5, 0) \Rightarrow (0, 5) \Rightarrow (5, 5) \Rightarrow (3, 7) \Rightarrow (3, 0) \Rightarrow (0, 3) \\ \Rightarrow (5, 3) \Rightarrow (1, 7) \Rightarrow (1, 0)$$

この結果は、 $5 \times 3 - 7 \times 2 = 1$ を表しています。

すなわち、油を

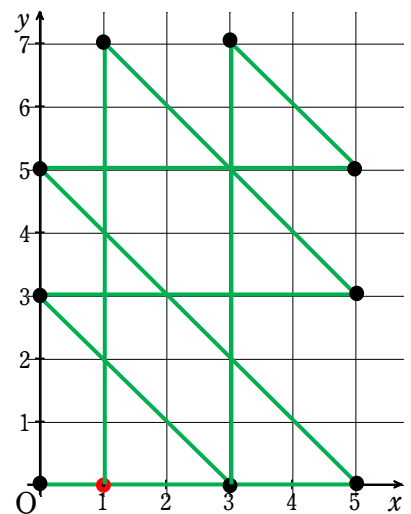
「5 升枡で桶から 3 回汲み取り、7 升枡で桶に 2 回戻す」
ことに当たります。

したがって、(*) の解が 1 つ見つかりました。

$$(x, y) = (3, 2)$$

これより、「答曰」の「総束数は 16 束」が得られます。

※ 上記の順序対を座標平面上の点に対応させ、
その推移を線で結ぶと、右図のようになります。



(補足)

座標平面において方程式 (*) の表す図形は直線です。この直線は点 (3, 2) を通るので、

$$5(x - 3) = 7(y - 2)$$

と変形することができます。この式と、5 と 7 が互いに素であることから、

$$(x - 3, y - 2) = (7k, 5k)$$

よて、一般解は

$$(x, y) = (3 + 7k, 2 + 5k)$$

(文責：五輪教一)